

CUM SĂ NU GREȘEȘTI

***Puterea
matematice
gândirii***

Traducere din engleză de
Smaranda Nistor



JORDAN ELLENBERG

*„Cel mai bun lucru în matematică este că merită nu doar
să fie învățată ca materie de studiu, ci asimilată ca parte
din gândirea zilnică și adusă iar și iar în fața minții,
cu încurajare mereu reînnoită.”*

BERTRAND RUSSELL, *Studiul matematicii* (1902)

Cuprins

Când o să folosesc eu chestia asta?	11
---	----

PARTEA ÎNTÂI | Linearitatea

1. Mai puțin suedezi	37
2. Dreaptă local, curbată global	51
3. Toată lumea e obeză	77
4. Cât face asta în americani morți?	93
5. Mai multă plăcintă decât farfurie	113

PARTEA A DOUA | Inferența

6. Brokerul din Baltimore și codul biblic	127
7. Peștii morți nu citesc gândurile	145
8. Reducerea la improbabil	185
9. Jurnalul internațional de haruspiciat	205
10. Mă auzi, Doamne? Sunt eu, inferența bayesiană!	231

PARTEA A TREIA | Așteptările

11. La ce să te aștepți atunci când aștepți să câștigi la loterie	273
12. Pierdeți mai multe avioane!	325
13. Unde se întâlnesc șinele de tren	353

14. Triumful mediocrității	409
15. Elipsa lui Galton	431
16. Cancerul pulmonar te face să fumezi?	477

PARTEA A CINEA | Existența

17. Opinia publică? Nu există așa ceva!	501
18. „Din neant am creat un straniu nou univers”	539
Cum să ai dreptate	577
Mulțumiri	601
Note	605

Când o să folosesc eu chestia asta?

Chiar în acest moment, într-o sală de curs de undeva din lume, o elevă se răstește la profesorul ei de matematică. Profesorul tocmai i-a cerut să-și petreacă o bună parte din weekend rezolvând o listă cu 30 de integrale definite.

Sunt alte lucruri pe care eleva ar prefera să le facă. De fapt, nu prea sunt multe alte lucruri pe care *nu* ar prefera să le facă. Știe foarte bine asta, pentru că și-a petrecut bună parte din weekendul precedent rezolvând o listă diferită – dar nu *foarte* diferită – cu 30 de integrale definite. Nu vede rostul și exact asta îi și spune profesorului. Iar la un moment dat în cursul acestei conversații, eleva va pune întrebarea de care profesorul se teme cel mai tare:

— *Când o să folosesc eu chestia asta?*

Iar profesorul va spune probabil ceva de genul:

— Știu că ți se pare plicticos, dar ține minte, nu știi ce carieră profesională vei avea... poate că nu vezi relevanța acum, dar s-ar putea să intri într-un domeniu unde va fi realmente important să știi cum să rezolvi o integrală definită, corect și de mână, nu cu ajutorul unui computer.

Acest răspuns nu-i mulțumește decât rareori pe elevi. Asta, pentru că e o minciună. Amândoi, profesorul și elevul, știu că e o minciună. Adulții care vor folosi vreodată integrala din $(1 - 3x + 4x^2)^{-2} dx$ sau formula pentru cosinus de 30 de grade sau împărțirea sintetică a polinoamelor pot fi numărați pe degetele câtorva mii de mâini.

Minciuna nu e prea satisfăcătoare nici pentru profesori, de altfel. Știi asta din proprie experiență: în numeroșii mei ani ca profesor de matematică, am cerut multor studenți să rezolve liste cu integrale definite.

Din fericire, există un răspuns mai bun. Sună cam așa:

„Matematica nu este doar o înșiruire de calcule pe care să le faci pe de rost până ce ți se epuizează răbdarea sau energia – deși ar putea părea așa, judecând după ce ți s-a predat în cadrul unor cursuri numite matematică. Integralele acelea sunt pentru matematică la fel ca ridicatul greutateților sau exercițiile de gimnastică pentru fotbal. Dacă vrei să joci fotbal – adică *să joci serios*, la nivel de performanță –, trebuie să faci o grămadă de exerciții fizice plicticoase și repetitive, aparent fără niciun rost. Dar jucătorii profesioniști *folosesc vreodată* aceste exerciții? Bine, nu vei vedea niciodată pe teren fotbaliștii ridicând haltere sau alergând în zigzag printre conuri de circulație. Dar îi vezi folosind forța, viteza, intuiția și flexibilitatea pe care le câștigă în timp, făcând acele exerciții, săptămână după săptămână, până la infinitul plictiselii. Învățatul acelor exerciții face parte din învățatul fotbalului.

Dacă vrei să-ți câștigi existența jucând fotbal sau măcar să faci parte din echipa universității, va trebui să petreci o mulțime de weekenduri anoste pe terenul de antrenament. Nu se poate altfel. Dar uite că există și o parte bună: dacă exercițiile de antrenament sunt prea mult pentru tine, poți în continuare să joci de plăcere, cu prietenii. Te poți bucura de satisfacția unui dribling reușit printre fundași sau a unui gol marcat de la distanță, exact la fel ca un sportiv profesionist. Vei fi mai sănătos și mai fericit decât dacă ai sta acasă și te-ai uita la un meci de fotbal la televizor.

Cu matematica e cam la fel. Poate că nu ai în vedere o carieră orientată spre matematică. Foarte bine – majoritatea

oamenilor sunt la fel ca tine. Dar tot poți să faci matematică. Probabil *faci deja* matematică, chiar dacă nu-i spui așa. Matematica este inextricabil legată de modul în care gândim. Și matematica te face mai bun la lucrurile de care te ocupi. A ști matematică e ca și cum ai purta o pereche de ochelari cu raze X, care revelează structurile ascunse dincolo de suprafața încurcată și haotică a lumii. Matematica este o știință de a nu fi în eroare despre lucruri, metodele și obiceiurile ei fiind create de-a lungul a secole întregi de muncă susținută și raționament argumentat. Cu instrumentele matematicii la îndemână, poți înțelege lumea într-un mod mai profund, mai temeinic și mai semnificativ. Nu ai nevoie decât de un îndrumător sau de o carte care să te învețe regulile și câteva tactici de bază. Eu am să-ți fiu îndrumător. Am să-ți arăt cum trebuie făcut”.

Din rațiuni de timp, nu spun decât rareori toate aceste lucruri în sala de curs. Dar într-o carte am loc să mă întind un pic mai mult. Sper să susțin cu dovezi pretențiile grandioase pe care tocmai le-am emis, arătându-ți că problemele la care ne gândim în fiecare zi – care țin de politică, de medicină, de comerț, de teologie – sunt împănate cu matematică. Înțelegerea acestui lucru te va ajuta să intuiești chestiuni ce nu sunt accesibile prin niciun alt mijloc.

Chiar dacă aș fi fost în locul profesorului pomenit anterior și i-aș fi ținut elevei întreg discursul însuflețitor de mai sus, probabil că ar fi rămas – mai ales dacă-i ageră la minte – neconvinsă.

— Toate bune și frumoase, domnule profesor, va spune ea. Dar sună teribil de abstract. Spuneți că, având matematica la dispoziție, poți înțelege corect lucruri față de care altfel ai fi în eroare. Dar ce fel de lucruri? Dați-mi un *exemplu concret*!

Moment în care eu i-aș spune povestea lui Abraham Wald și a găurilor de glonț lipsă.

Această istorioară, la fel ca multe altele din al Doilea Război Mondial, începe cu naziștii hăituind un evreu prin Europa și se termină cu naziștii regretând că au făcut-o. Abraham Wald s-a născut în 1902¹, într-un oraș numit pe atunci Klausenburg, în ceea ce era la vremea aceea Imperiul Austro-Ungar. Odată ajuns la adolescență, Războiul Mondial intrase în cărțile de istorie și orașul lui natal devenise Cluj, din România. Wald era nepotul unui rabin și fiul unui brutar cușer, dar, încă de mic, a fost un matematician aproape înăscut. Talentul lui pentru această materie a fost repede sesizat și a fost admis să studieze matematica la Universitatea din Viena, unde s-a simțit atras de niște subiecte care până și după standardele matematicii pure, erau mai degrabă abstracte, dacă nu chiar abstruse: teoria mulțimilor și spațiile metrice.

Dar când Wald și-a terminat studiile, la mijlocul anilor 1930, Austria se afla într-o profundă criză economică și nici nu se punea problema ca un străin să poată fi angajat ca profesor universitar la Viena. Wald a avut noroc cu o ofertă de angajare venită din partea lui Oskar Morgenstern. Acesta avea să emigreze ulterior în Statele Unite, unde a contribuit la inventarea teoriei jocurilor, dar în 1933 era directorul Institutului Austriac pentru Cercetare Economică și l-a angajat pe Wald, cu o leafă modestă, să îndeplinească tot soiul de însărcinări care presupuneau calcule matematice. S-a dovedit a fi o mișcare inspirată pentru Wald; experiența astfel dobândită în științele economiei l-a ajutat să obțină o ofertă de colaborare cu Comisia Cowles – un institut economic care-și avea pe atunci sediul în Colorado Springs. În pofida situației politice care se înrăutățea văzând cu ochii, Wald șovăia să facă un pas care l-ar fi îndepărtat cu totul de matematica pură. Dar apoi naziștii au invadat Austria,

ușurându-i considerabil decizia lui Wald. După doar câteva luni petrecute în Colorado, i s-a oferit o catedră de profesor la Universitatea Columbia; și-a făcut încă o dată bagajele și s-a mutat la New York.

Și de acolo a luptat el în război.

Grupul pentru Cercetare Statistică (Statistical Research Group – SRG)², unde Wald a petrecut mare parte din perioada celui de-al Doilea Război Mondial, era un program strict secret care pune laolaltă forța colectivă a statisticienilor americani pentru a contribui la efortul de război – oarecum similar Proiectului Manhattan, doar că armamentul dezvoltat era reprezentat de ecuații, nu de bombe. Iar sediul SRG era chiar în Manhattan, la numărul 401, pe Strada 118 West, în Morningside Heights, la doar o stradă depărtare de Universitatea Columbia. Clădirea adăpostește acum apartamente de locuit pentru corpul profesoral și câteva cabinete medicale, dar în 1943 era centrul nervos plin de zumzet și scânteii al matematicii în vreme de război. La Grupul de Matematici Aplicate – Columbia, zeci de tinere femei aplecate peste mașini de calculat Marchant se ocupau de formulele pentru calcularea curbei optime pe care un pilot de vânătoare ar trebui s-o traseze prin aer pentru a menține un avion inamic în bătaia propriilor mitraliere. Într-un alt apartament, o echipă de cercetători de la Princeton elabora protocoale pentru bombardamentul strategic. Iar aripa de la Universitatea Columbia a proiectului bombei atomice era imediat alături.

Dar SRG era grupul de cel mai înalt nivel și, în cele din urmă, cel mai influent dintre toate aceste colective de lucru. Atmosfera din grup combina deschiderea intelectuală și intensitatea unui departament academic cu sentimentul scopului comun, pe care îl găsim doar atunci când miza este foarte importantă. „Atunci când făceam recomandări”, scria directorul W. Allen

Wallis, „adeseori lucrurile chiar se întâmplau. Avioanele de vânătoare intrau în luptă cu mitralierele încărcate conform recomandărilor lui Jack Wolfowitz* privind combinarea tipurilor de muniție, iar piloții poate se întorceau sau poate nu. Avioanele marinei militare lansau rachete ale căror propulsoare trecuseră de inspecția prin control statistic de calitate conform planurilor lui Abe Girshick, iar rachetele explodau și ne distrugau propriile avioane cu piloți cu tot sau poate distrugau ținta.”³

Talentul matematic pus la dispoziție era egal cu gravitatea sarcinii. Ca să-l cităm pe Wallis: „SRG era cel mai remarcabil colectiv de statisticieni organizat vreodată, ținând cont atât de număr, cât și de calitate”⁴. Frederick Mosteller, care avea să înființeze mai târziu departamentul de statistică de la Universitatea Harvard, era acolo. La fel și Leonard Jimmie Savage, pionierul teoriei deciziilor și marele susținător al domeniului ce avea să primească denumirea de statistică bayesiană.** Norbert Wiener, matematicianul de la MIT și creatorul ciberneticii, trecea pe acolo din când în când. Era un grup în care Milton Friedman, viitorul laureat al Nobelului pentru economie, era deseori pe locul al patrulea în clasamentul „cel mai deștept om din încăpere”.

Cel mai deștept om din încăpere era de obicei Abraham Wald. Fusesse profesorul lui Allen Wallis la Columbia și funcționa ca un fel de eminență matematică a grupului. În continuare considerat „străin inamic”, nu avea voie, tehnic vorbind, să vadă rapoartele strict secrete pe care le producea; la SRG circula gluma că secretarele erau obligate să-i smulgă din

* Tatăl lui Paul Wolfowitz.

** Savage era aproape complet orb, neputând să vadă decât cu colțul unui ochi, iar la un moment dat a petrecut șase luni mâncând numai și numai pemican, ca să dovedească o idee despre explorarea ținuturilor arctice. M-am gândit că merită menționat.

mână hârtia imediat ce termina de scris pe ea.⁵ Wald era, din unele puncte de vedere, un participant improbabil. Înclinația lui era, ca întotdeauna, spre abstracțiuni și cât mai departe de aplicațiile practice. Dar motivația lui de a-și folosi talentele împotriva puterilor Axei era evidentă. Iar atunci când aveai nevoie să transformi o idee vagă în matematică solidă, Wald era omul pe care ți l-ai fi dorit lângă tine.

Bun, să vedem care-s datele problemei.⁶ Nu vrei ca avioanele tale să fie doborâte de avioanele dușmane, deci le blindezi. Dar blindajul îngreunează avionul, iar aparatele de zbor mai grele sunt mai greu de manevrat și consumă mai mult carburant. Dacă le blindezi prea mult, e o problemă; dacă le blindezi prea puțin, iar e o problemă. Undeva la mijloc există un optim. Rațiunea pentru care ai o echipă de matematicieni pusă la fereală într-un apartament din New York City este ca să dibui unde-ar fi acest optim.

Reprezentanții armatei au venit la SRG cu niște date despre care credeau că ar putea fi utile. Când avioanele americane s-au întors din incursiuni deasupra Europei, erau pline cu găuri de gloanțe. Dar distrugerile nu erau uniform distribuite pe toată suprafața aparatului de zbor. Fuzelajul avea mai multe găuri în el, iar motoarele mai puține.

Componenta de avion	Găuri de glonț pe picior pătrat (0,09 metri pătrați)
Motor	1,11
Fuzelaj	1,73
Rezervor	1,55
Restul avionului	1,8

Ofițerii au intuit o ocazie de eficientizare; poți obține aceeași protecție cu mai puțin blindaj dacă poți concentra blindajul în

locurile unde e cea mai mare nevoie de el, unde avioanele sunt cel mai des lovite. Dar cât de mult blindaj suplimentar, exact, trebuia pus în acele părți ale avionului? Pentru acest răspuns au venit ei la Wald. Nu au primit răspunsul căutat.

Blindajul, a spus Wald, nu se pune unde se află găurile de glonț. Se pune unde acestea *nu sunt*: la motoare.

Intuiția lui Wald a fost să se întrebe pur și simplu: unde sunt găurile lipsă? Cele care ar fi trebuit să se afle peste tot pe carcasa fiecărui motor, dacă stricăciunile ar fi fost egal distribuite pe toată suprafața avionului. Wald era foarte sigur că știe unde. Găurile lipsă erau pe avioanele lipsă. Motivul pentru care avioanele se întorceau la bază cu mai puține lovituri la motor era acela că avioanele lovite în motor nu se mai întorceau. Pe când numărul mare de avioane care reveneau la bază cu fuzelajul făcut complet șvaițer era o dovadă foarte convingătoare că loviturile la fuzelaj pot (și, ca urmare, trebuie) să fie tolerate. Dacă te duci în secția de recuperare a unui spital, vei vedea mult mai mulți oameni cu găuri de glonț în picior, decât oameni cu găuri de glonț în piept. Dar asta nu e din cauză că oamenii nu sunt împușcați în piept, ci pentru că aceia care sunt împușcați în piept nu supraviețuiesc.

Iată un truc de matematician bătrân și hârșit, care face ca imaginea să fie perfect clară: *fixează câteva din variabile la valoarea zero*. În acest caz, variabila de manevrat este probabilitatea ca un avion care primește un glonț în motor să reușească să rămână în aer. Fixarea la valoarea zero a acestei probabilități înseamnă că un singur glonț ajuns la motor garantează doborârea avionului. Cum ar arăta în acest caz datele? Am avea avioane care se întorc cu găuri de glonț peste tot pe aripi, pe fuzelaj, pe bot – dar niciuna la motor. Analistul militar are două variante de explicație: fie gloanțele germane s-a întâmplat pur și simplu să lovească toate părțile avionului, mai puțin una

singură, fie motorul este un punct de vulnerabilitate totală. Ambele variante explică datele, dar ultima are mult mai mult sens. Blindajul trebuie pus acolo unde nu sunt găuri de gloanțe.

Recomandările lui Wald au fost iute puse în practică și au continuat să fie folosite de marina militară și de forțele aeriene americane în războiul din Coreea și în cel din Vietnam.⁷ N-aș putea spune exact câte avioane americane au salvat ele, deși descendenții SRG-ului care „treieră” date în armata de azi au o idee destul de precisă, cu siguranță. Un lucru pe care autoritățile militare din America l-au înțeles foarte bine de-a lungul timpului este că țările nu câștigă războaie doar fiind mai viteze decât inamicul, sau mai libere, sau un pic mai favorizate de Dumnezeu. Învingătoare este de obicei tabăra care reușește să aibă cu 5% mai puține avioane doborâte, sau care folosește cu 5% mai puțin carburant, sau își hrănește infanteriștii cu 5% mai mult conținut nutritiv la 95% din costul părții adverse. Nu din chestii de genul ăsta se fac filmele de război, dar războaiele sunt făcute exact din chestii de genul ăsta. Și e matematică la fiecare pas.

De ce a văzut Wald ce n-au putut vedea ofițerii, care aveau cunoștințe mult mai vaste și înțelegeau mult mai bine confruntarea aeriană? Chestiunea revine la modelul său de gândire, antrenat prin exercițiul matematic. Un matematician întreabă tot timpul: „De la ce ipoteze pleci? Și sunt ele justificate?” Ceea ce poate fi enervant. Dar poate fi și foarte productiv. În acest caz, ofițerii porneau, fără să-și dea seama, de la o anumită premisă: că avioanele care reușeau să se întoarcă alcătuiau un eșantion reprezentativ al tuturor avioanelor. Dacă ar fi adevărată această ipoteză, atunci ai putea trage concluzii despre distribuția găurilor de glonț de pe toate avioanele, examinând distribuția lor de pe avioanele supraviețuitoare. Odată ce ai

sesizat că pleci de la această ipoteză, nu durează decât o clipă ca să-ți dai seama că te înșeli: nu există absolut niciun motiv pentru ca avioanele să aibă o probabilitate egală de supraviețuire, indiferent unde sunt lovite. Într-o exprimare de jargon matematic la care vom reveni în Capitolul 15, rata de supraviețuire și localizarea găurilor de glonț sunt *corelate*.

Celălalt avantaj al lui Wald era dat de înclinația lui spre abstractizare. Wolfowitz, care studiasse cu Wald la Universitatea Columbia, scria că problemele pe care Wald le prefera erau „de soiul cel mai abstract” și că el era „oricând dispus să vorbească despre matematică, dar fără să-l intereseze popularizarea și aplicațiile speciale”⁸.

Adevărat, dată fiind personalitatea pe care o avea, lui Wald îi venea foarte greu să-și concentreze atenția pe probleme aplicate. Detaliile avioanelor și ale mitralierelor erau, în ochii lui, un simplu înveliș – privirea lui a pătruns direct prin el, ca să ajungă la eșafodajul matematic al întregii chestiuni. Uneori, această abordare te poate face să ignori elemente ale problemei care chiar contează. Dar, pe de altă parte, te lasă să vezi scheletul comun al unor probleme care arată foarte diferit la suprafață. Astfel, posezi o experiență semnificativă chiar și în domenii unde s-ar părea că nu ai deloc.

Pentru un matematician, structura care stă la baza problemei cu găurile de glonț este un fenomen denumit *eroarea sistematică de supraviețuire*. Acesta apare iar și iar, în tot felul de contexte. Și, odată ce te-ai familiarizat cu el și îl cunoști foarte bine, așa cum era cazul lui Wald, ești antrenat să-l observi oriunde s-ar ascunde.

De exemplu, fondurile mutuale. Evaluarea performanței fondurilor este un domeniu în care nu-ți dorești să te înșeli, nici măcar cu foarte puțin. O modificare cu 1% a creșterii anuale

poate fi diferența dintre un activ financiar valoros și unul de duzină. Fondurile din categoria Large Blend a companiei Morningstar, care investesc în companii mari ce reprezintă aproximativ indexul S&P 500, arată ca fiind de primul tip pomenit. Fondurile din această clasă au crescut în medie cu 178,4% între 1995 și 2004: o foarte sănătoasă rată de 10,8% pe an.* S-ar părea că ar fi o idee foarte bună, dacă ai avea ceva bani disponibili, să-i investești în aceste fonduri, nu-i așa?

Ei bine, nu. Un studiu din 2006 al celor de la Savant Capital a pus aceste cifre într-o lumină oarecum rece.⁹ Mai gândește-te o dată cum generează Morningstar indicatorul de creștere pe care-l anunță. Este anul 2004, iei toate fondurile clasificate drept Large Blend, și vezi cu cât au crescut în ultimii zece ani.

Ceva însă lipsește: *fondurile care nu sunt acolo*. Fondurile mutuale nu trăiesc veșnic. Unele prosperă, altele mor. Cele care mor sunt, în general, cele care nu fac bani. Deci să judeci valoarea unui deceniu de fonduri mutuale după cele care încă mai există la sfârșitul celor zece ani e ca și cum ai judeca manevrele ocolitoare ale piloților noștri după numărul găurilor de glonț de pe avioanele care reușesc să se întoarcă la bază. Ce ar însemna, dacă n-am găsi niciodată decât o singură gaură de glonț în fiecare avion? Nu că piloții noștri sunt cei mai dibaci în a evita focul inamic, ci că avioanele care au fost lovite de două ori s-au prăbușit în flăcări.

Studiul Savant Capital a descoperit că, dacă se includea și performanța fondurilor dispărute, alături de cea a fondurilor supraviețuitoare, rata rentabilității scădea la 134,5%, ceea ce înseamnă o rată anuală mult mai normală, de 8,9%. O cercetare mai recentă a venit să confirme această constatare: un studiu

* Ca să fim cinstiți, însuși indexul S&P 500 a avut o evoluție încă și mai bună, câștigând 212,5% pe aceeași perioadă.

Respect pe de mari dimensiuni din 2011 al publicației *Review of Finance*, cuprinzând aproape 5 000 de fonduri, a dus la concluzia că rentabilitatea excedentară a celor 2 641 de fonduri supraviețuitoare este cu vreo 20% mai mare decât rentabilitatea recalculată cu includerea fondurilor care n-au supraviețuit până la sfârșitul perioadei.¹⁰ Dimensiunea erorii sistematice de supraviețuire se prea poate să-i fi surprins pe investitori, dar probabil că nu l-ar fi surprins pe Abraham Wald.

Matematica este o continuare a bunului-simț logic prin alte mijloace

În acest punct, tânăra mea interlocutoare mă va opri ca să întrebe, foarte rezonabil: Unde-i matematica în toată povestea asta? Wald era matematician, adevărat, și nu contestă nimeni că soluția lui la problema cu găurile de glonț a fost ingenioasă, dar ce e matematic aici? Nu se vede nicio identitate trigonometrică, nicio integrală, nicio inecuație sau formulă.

În primul rând: Wald a folosit formule. Eu am spus povestea fără ele, pentru că asta a fost doar introducerea. Când scrii o carte care să le explice puberilor reproducerea la om, introducerea se oprește înainte de chestiile hidraulice despre cum ajunge bebelușul în burta mamei. În loc de asta, începi cu ceva gen „Totul în natură se schimbă; copacii își pierd frunzele în timpul iernii, doar ca să înmugurească din nou primăvara; omida cea urâtă intră în crisalidă și iese apoi afară sub forma unui fluture splendid. Și tu faci parte din natură, și...”

În această parte a cărții ne aflăm noi acum.

Dar aici suntem cu toții adulți. Lăsând puțin deoparte eufemismele, iată cum arată o mostră de pagină din raportul pe care Wald l-a elaborat efectiv:¹¹

lower bound to the Q_i could be obtained. The assumption here is that the decrease from q_i to q_{i+1} lies between definite limits. Therefore, both an upper and lower bound for the Q_i can be obtained.

We assume that

$$\lambda_1 q_i \leq q_{i+1} \leq \lambda_2 q_i ,$$

where $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ and such that the expression

$$\sum_{j=1}^n \frac{\frac{a_j}{j(j-1)}}{\lambda_1^{\frac{j}{2}}} < 1 - a_0 \quad (A)$$

is satisfied.

The exact solution is tedious but close approximations to the upper and lower bounds to the Q_i for $i < n$ can be obtained by the following procedure. The set of hypothetical data used is

$$\begin{array}{ll} a_0 = .780 & a_3 = .010 \\ a_1 = .070 & a_4 = .005 \\ a_2 = .040 & a_5 = .005 \\ \lambda_1 = .80 & \lambda_2 = .90 \end{array}$$

Condition A is satisfied, since by substitution

$$.07 + \frac{.04}{.8} + \frac{.01}{(.8)^3} + \frac{.005}{(.8)^6} + \frac{.005}{(.8)^{10}} = .20529 ,$$

which is less than

$$1 - a_0 = .22 .$$

THE LOWER LIMIT OF Q_i

The first step is to solve equation 66. This involves the solution of the following four equations for positive roots q_0, q_1, q_2, q_3 .

Sper că n-a fost prea șocant.

Totuși, *ideea* reală din spatele intuiției lui Wald nu are nevoie de nimic din formalismul de mai sus. Deja am explicat-o, fără nicio notație matematică, de niciun fel. Deci întrebarea

Respect pe studentei mele rămâne valabilă: de unde până unde matematică?! Nu e doar bun-simț logic?

Ba da. Matematica *este* bun-simț logic. La un anumit nivel elementar, e limpede acest lucru. Cum poți să explici cuiva că, dacă adaugi șapte lucruri peste cinci lucruri ajungi la același rezultat ca atunci când adaugi cinci lucruri peste șapte? Nu poți – acest lucru face parte integrantă din modul nostru de gândire despre cum se combină lucrurile laolaltă. Matematicienilor le place să dea nume fenomenelor descrise de bunul-simț logic: în loc să spună că „*Acest* lucru adunat cu *acel* lucru este *același* lucru cu *acel* lucru adunat cu *acest* lucru”, ei spun că „Adunarea este comutativă”. Sau, dat fiind că le plac simbolurile, vor scrie:

Oricare ar fi a și b, $a + b = b + a$.

În ciuda formulei cu aspect oficial, vorbim aici despre o realitate faptică pe care orice copil o înțelege instinctiv.

Înmulțirea e o poveste ușor diferită. Formula arată cam la fel:

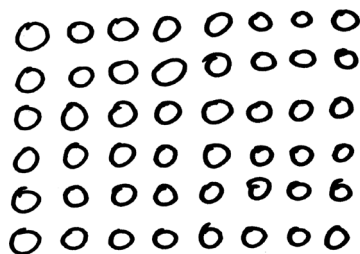
Oricare ar fi a și b, $a \times b = b \times a$.

Mintea noastră, când i se prezintă acest enunț, nu va spune: „Ei nu zău!” chiar pe loc, așa cum face la adunare. E „de bun-simț logic” ca două mulțimi de câte șase lucruri să fie același lucru cu șase mulțimi de câte două?

Poate că nu; dar poate *să devină* o chestiune de bun-simț logic. Iată cea mai veche amintire matematică a mea. Stau întins pe burtă, acasă, cu obrazul lipit de covorul mișos de pe jos, uitându-mă la pick-upul părinților mei. Cel mai probabil, ascult fața a doua de pe Albumul Albastru al Beatles-ilor. Cred că am

vreo șase ani. Suntem în anii 1970, deci pick-upul e într-o carcasă din lemn furniruit, având pe toată suprafața laterală niște șiruri de găurele care descriu un dreptunghi. Opt găurele pe orizontală, șase găurele cum numeri în sus și în jos. Deci stau acolo lungit și mă uit la găurile din carcasă. Cele șase rânduri de găurele. Cele opt coloane de găurele. Concentrându-mi privirea mai departe sau mai aproape, îmi pot face mintea să penduleze între a vedea rândurile și a vedea coloanele. Șase rânduri cu opt coloane fiecare. Opt coloane cu șase rânduri fiecare.

Și atunci mi-am dat seama – opt grupuri de șase erau la fel cu șase grupuri de opt. Nu pentru că ar fi fost o regulă pe care să mi-o fi spus cineva, ci pentru că nu avea cum să fie altfel. Numărul de găuri din carcasa de lemn era numărul de găuri din carcasa de lemn, indiferent cum le-ai fi numărat.



APARATUL STEREO AL PĂRINȚILOR MEI,
1977

Obișnuim să predăm matematica sub forma unei lungi liste cu reguli. Le înveți în ordine și trebuie să te supui lor, fiindcă, dacă nu te supui lor, iei notă mică. *Asta nu e matematică.* Matematica este studiul lucrurilor care ies într-un anumit fel pentru că nu există niciun alt mod în care acele lucruri ar putea să existe.

Bine, să fim totuși cinstiți: nu orice lucru din matematică poate fi făcut atât de perfect limpede pentru intuiția noastră precum adunarea și înmulțirea. Nu poți face analiză matematică prin bun-simț logic. Dar analiza matematică este, totuși, *derivată* din judecata noastră sănătoasă – Newton a luat intuiția noastră fizică despre mișcarea obiectelor în linie dreaptă, a formalizat-o și apoi a construit peste acea structură formală o descriere matematică universală a mișcării. Odată ce ai în mână teoria lui Newton, poți s-o aplici la probleme care ți-ar face capul să ți se învârtă, dacă n-ai avea niște ecuații care să te ajute. În același fel, avem sisteme mentale înnăscute pentru evaluarea probabilității ca un anumit lucru să se întâmple. Sistemele acestea sunt însă foarte neconvingătoare și nesigure, mai ales când vine vorba de evenimente extrem de rare. Atunci avem nevoie să ne proptim intuiția cu câteva teoreme și metode vâncioase și bine plasate și facem din tot eșafodajul o teorie matematică a probabilității.

Limbajul specializat în care conversează matematicienii între ei este un instrument magnific pentru comunicarea în mod precis și expeditiv a unor idei complexe. Dar faptul că sună nefiresc poate crea printre profani impresia unei sfere de gândire total străine gândirii obișnuite. O impresie fix greșită.

Matematica este ca o proteză atomică pe care o atașezi bunului-simț logic, multiplicându-i astfel enorm anvergura și capacitatea. În ciuda puterii matematicii și în ciuda notațiilor și abstracțiunilor sale uneori intimidante, efortul mental efectiv depus nu se deosebește prea mult de modul în care ne gândim la problemele mai pragmatice din existența noastră de zi cu zi. Mie mi se pare util să păstrez în minte o imagine a lui Iron Man făcând o gaură în zid cu pumnul. Pe de o parte, forța care sparge efectiv zidul din cărămidă este asigurată nu de mușchii lui Tony Stark, ci de o serie de servomecanisme splendid sincronizate,

alimentate de un minuscul generator de particule beta. Pe de altă parte, din punctul de vedere al lui Tony Stark, ceea ce face el este să izbească într-un perete cu pumnul, exact cum ar face și fără armura lui Iron Man. Doar că face asta cu mult, mult mai multă forță!

Ca să-l parafralez pe Clausewitz: Matematica este o continuare a bunului-simț logic prin alte mijloace.

Fără structura riguroasă pe care o furnizează matematica, bunul-simț logic te poate duce într-o direcție greșită. Asta li s-a întâmplat militarilor care voiau să blindeze niște părți ale avionului care erau deja destul de rezistente. Dar matematica formală fără judecată sănătoasă – fără permanenta interacțiune dintre raționamentul abstract și intuițiile noastre despre cantitate, timp, spațiu, mișcare, comportament și incertitudine – ar fi doar un demers steril de respectare a regulilor și contabilizare. Cu alte cuvinte, matematica ar fi, de fapt, ceea ce crede că este arțăgoasa mea studentă de la cursul de analiză matematică.

Pericolul e unul real. John von Neumann, în eseul lui din 1947 intitulat „Matematicianul”, avertiza:

Pe măsură ce o disciplină matematică se duce foarte departe de sursa ei empirică sau, încă și mai mult, dacă este o a doua sau a treia generație doar indirect inspirată de idei provenite din „realitate”, o pasc niște pericole foarte grave. Devine din ce în ce mai pur estetizantă, din ce în ce mai *artă pentru artă*. N-ar fi neapărat ceva rău dacă domeniul este înconjurat de subiecte corelate care încă mai au legături empirice sau dacă disciplina în cauză este sub influența unor oameni cu un gust extraordinar de bine dezvoltat. Dar există un mare pericol ca subiectul să se dezvolte pe calea minimei rezistențe, ca râul, atât de departe de izvorul său, să se despartă într-o multitudine de ramificații insignifiante și ca disciplina să devină o masă dezorganizată de amănunte și complexități. Cu alte cuvinte, la mare depărtare de sursa empirică sau după

Ce fel de matematică va apărea în această carte?

Dacă ai făcut cunoștință cu matematica numai la școală, înseamnă că ți s-a spus o poveste care este foarte limitată și, în bună măsură, falsă. Matematica de școală se compune în mare parte dintr-o succesiune de date factuale și reguli, date care sunt certe și reguli care provin dintr-o sursă superioară de autoritate și care nu pot fi puse în discuție. Tratează chestiunile matematice ca pe ceva complet și definitiv determinat.

Matematica nu este definitiv determinată. Chiar și în privința obiectelor elementare de studiu, cum ar fi numerele și figurile geometrice, neștiința noastră este mult mai mare decât cunoașterea. Iar în privința lucrurilor pe care chiar le știm, am ajuns la ele doar după extrem de mult efort, controverse și confuzie. Tot acest tumult, alături de truda aferentă, este îndepărtat cu grijă din manualul tău.

Există situații și situații, bineînțeles. Nicicând nu s-a pus problema vreunei controverse privind realitatea că $1 + 2 = 3$. Întrebarea *cum și dacă putem realmente dovedi* că $1 + 2 = 3$, care

* Viziunea lui von Neumann despre natura matematicii este una întemeiată, dar, cinstit vorbind, e nițel cam excesivă caracterizarea drept „degenerată” pe care el o aplică matematicii dezvoltate în scopuri pur estetice. Von Neumann scria aceste rânduri după doar zece ani de la expoziția de *entartene Kunst* („artă degenerată”) din Berlinul lui Hitler, al cărei scop era să demonstreze că „arta pentru artă” ar fi genul de lucru care le place evreilor și comuniștilor, având menirea să submineze sănătoasa artă „realistă”, imperios necesară unui stat teutonic viguros. Date fiind împrejurările, o matematică fără nicio utilitate practică aparentă te poate face să intri cumva în defensivă. Un autor cu altfel de angajamente politice decât ale mele ar aduce în discuție, odată ajuns aici, opera plină de însuflețire a lui von Neumann în dezvoltarea și fabricarea armamentului nuclear.

oscilează derutant între matematică și filosofie, e cu totul altă poveste – vom reveni asupra ei la sfârșitul cărții. Dar că acest calcul este corect constituie un adevăr irefutabil. Tumultul se află în altă parte. Ne vom apropia de mai multe ori de el, suficient încât să intre în raza noastră de observație.

Realitățile matematice pot fi simple sau complicate și pot fi superficiale sau profunde. Acest lucru împarte universul matematic în patru cadrane:

Profund Superficial	EȘTI ← AICI ↑	Fermat Poincaré Ipoteza Riemann Geometria algebrică Spațiile perfectoidale ...
	$1+2=3$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\int x^{-1} \sqrt{x^3-1} dx =$ $\frac{2}{3} \sqrt{x^3-1} \cdot$ $\left(1 - \frac{\tanh^{-1}(\sqrt{1-x^3})}{\sqrt{1-x^3}}\right)$ $+ C$
	Simplu Complicat	

Adevărurile aritmetice elementare, cum ar fi $1 + 2 = 3$, sunt simple și superficiale. La fel și identitățile de genul $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ sau formula rădăcinilor ecuației de gradul al doilea – posibil să-ți vină mai greu să fii convins de adevărul lor, comparativ cu $1 + 2 = 3$, dar, până la urmă, nici ele nu au cine știe ce încărcătură conceptuală.

Trecând mai departe la cadranul complicat/superficial, avem problema înmulțirii numerelor din zece cifre, sau

calcularea unei integrale definite mai încâlcite, sau, după vreo doi ani de facultate, curba Frobenius pe o formă modulară a conductorului 2377. Nu e de neconceput că s-ar putea să ai nevoie într-o zi, din cine știe ce motiv, să știi răspunsul la o astfel de problemă și indubitabil că ar fi undeva între enervant și imposibil de calculat cu mâna; sau, în cazul formeii modulare, s-ar putea să fie nevoie de ceva școală serioasă chiar numai ca să înțelegi ce se cere. Dar faptul că știi răspunsurile respective nu-ți îmbogățește practic cu nimic cunoașterea despre lume și viață.

Cadranul complicat/profund este cel unde matematicienii profesioniști ca mine preferă să-și petreacă majoritatea timpului. Acolo viețuiesc celebritățile în materie de teoreme și conjecturi: ipoteza Riemann, ultima teoremă a lui Fermat,* conjectura lui Poincaré, problema claselor de complexitate P și NP, teorema lui Gödel... Fiecare dintre aceste teoreme presupune idei cu o semnificație profundă, de o importanță fundamentală și o năucitoare frumusețe, brutal de tehnice în specificitatea lor, și fiecare este protagonista unor cărți care i-au fost dedicate numai ei.¹²

Dar nu și această carte. Cartea aceasta nu va ieși din cadranul aflat în stânga sus: simplu și profund. Ideile matematice de care vrem să ne ocupăm sunt cele care pot fi abordate în mod direct și profitabil, indiferent dacă pregătirea ta matematică se oprește în faza prealgebrică sau merge mult mai departe. Și ele nu sunt „doar simple adevăruri”, de genul unui banal enunț aritmetic – ele sunt principii a căror aplicare depășește cu mult lucrurile pe care te-ai obișnuit să le socotești ca aparținând doar matematicii. Ele sunt uneltele pe care te poți bizui, din

* Care, printre profesioniști, se numește acum teorema lui Wiles, pentru că Andrew Wiles a demonstrat-o (cu o mână de ajutor crucială din partea lui Richard Taylor), iar Fermat nu. Dar denumirea tradițională nu va fi probabil niciodată schimbată.

Respect pe instrumentarul pe care-l porți cu tine tot timpul și care, folosite cum se cuvine, te vor ajuta să nu te înșeli.

Matematica pură poate fi ca un fel de mănăstire, un spațiu al liniștii și siguranței, perfect izolat de influențele pernicioase ale haosului și inconsecvenței mundane. Eu am crescut între acele ziduri. Alți pasionați de matematică, dintre puștii pe care i-am cunoscut, s-au lăsat tentați de aplicații în fizică, în genomică sau în arta întunecată a administrării fondurilor de investiții, dar eu nici n-am vrut să aud de asemenea *ritualuri de trecere la maturitate*.^{*} Ca student la universitate, m-am dedicat teoriei numerelor – ceea ce Gauss numea „regina matematicii”, cel mai pur dintre subiectele pure, grădina ferecată din mijlocul mănăstirii, unde contemplam aceleași întrebări despre numere și ecuații care le-au dat bătaie de cap și vechilor greci, și care nu și-au pierdut aproape nimic din caracterul sâcâitor de insolubil în cei 2 500 de ani care au trecut.

La început, am lucrat la teoria numerelor cu un parfum clasic, demonstrând adevăruri despre sume de numere întregi la puterea a patra, pe care le puteam explica, dacă mi se cerea insistent, familiei mele adunate la masa de Ziua Recunoștinței, chiar dacă nu puteam să explic cum am demonstrat ceea ce demonstrasem. Nu după mult timp însă m-am lăsat ispitit de sfere încă și mai abstracte, cercetând probleme în care era imposibil să discuți despre noțiunile protagoniste principale – „reprezentări galois modulare reziduale”, „coomologia sistemelor de moduli”, „sisteme dinamice în spații omogene”, chestii dintr-astea – în exteriorul arhipelagului format din săli de curs

* Sincer să fiu, pe la douăzeci și un pic de ani am avut în gând să devin un Romancier Literar Serios. Ba chiar am terminat un Roman Literar Serios, intitulat *Regele-Lăcustă* (*The Grasshopper King*), care chiar a fost publicat. Dar, cu această ocazie, am descoperit că fiecare zi dedicată scrierii Romanului Literar Serios era o zi din care jumătate o petreceam bântuind posac de colo până colo și dorindu-mi să fi lucrat la o problemă de matematică.

și birouri ale cadrelor universitare, care se întinde de la Oxford la Princeton și de la Kyoto la Paris, ajungând până la Madison, statul Wisconsin, unde sunt acum profesor. Când eu spun că toate chestiile astea sunt incitante și pline de semnificație și de o frumusețe aparte și că nu m-aș sătura niciodată să mă gândesc la ele, probabil că va trebui să mă crezi pe cuvânt, pentru că e nevoie de ani mulți de învățătură, doar ca să ajungi în punctul în care obiectele de studiu încep să-ți intre în raza vizuală.

Dar s-a întâmplat ceva amuzant. Cu cât cercetarea mea devenea mai abstractă și mai îndepărtată de experiența trăită, cu atât începeam să remarc cât de multă matematică se întâmplă dincolo de ziduri. Nu reprezentări galois sau coomologie, ci idei care erau mai simple, mai vechi și tot atât de profunde – cadranul de nord-vest al matricei conceptuale. Am început să scriu articole pentru reviste și ziare despre cum arată lumea văzută printr-o lentilă matematică și am constatat, spre surprinderea mea, că până și oameni care declarau că detestă matematica erau dispuși să le citească. Era un fel de predare a matematicii, dar mult diferită de ceea ce facem într-o sală de clasă sau de curs.

Ce are în comun cu predarea de la școală este că ți se cere ție, cititorului, să faci câte ceva. Revenind la von Neumann, „Matematicianul”, el spunea așa: „E mai greu să înțelegi mecanismul unui aeroplan și teoriile forțelor care îl ridică în aer și îl împing înainte decât să zbori pur și simplu în el, să fii ridicat și transportat de el – sau chiar să-l manevrezi. Numai cineva cu totul excepțional e capabil să ajungă la înțelegerea unui proces fără a fi dobândit mai întâi o profundă familiarizare cu derularea și utilizarea lui și înainte de a-l fi asimilat de o manieră instinctivă și empirică”.

Cu alte cuvinte: e foarte greu să *înțelegi* matematica fără a face un pic de matematică. Nu există cale regală spre geometrie, cum i-a spus Euclid lui Ptolemeu, sau, poate, în funcție de sursa pe care ai folosit-o, cum i-a spus Menaechmus lui Alexandru cel Mare. (Să nu ne mai ascundem după deget: maximele celebre din vechime atribuite savanților Antichității sunt probabil inventate, dar asta nu le face cu nimic mai puțin instructive!)

Nu va fi genul de carte în care eu fac gesturi grandilocvente, dar vagi, în direcția marilor monumente ale matematicii, dându-vă vouă instrucțiuni cum să le admirați cuviincios de la mare depărtare. Suntem aici ca să ne murdărim puțin pe mâini. Vom calcula câteva lucruri. Vor fi niște formule și ecuații, atunci când voi avea nevoie de ele ca să scot în evidență o idee. Nu va fi necesară matematica superioară, aritmetica va fi suficientă – deși voi explica numeroase noțiuni care depășesc mult aritmetica. Voi trasa câteva grafice și diagrame, dar foarte schematice. Vom întâlni unele noțiuni din matematica de școală, scoase din habitatul lor obișnuit; vom vedea cum funcțiile trigonometrice descriu gradul în care două variabile sunt legate între ele, ce are de spus analiza matematică despre relația dintre fenomenele liniare și cele neliniare și cum pot servi formulele pătrate drept model cognitiv pentru cercetarea științifică. A, și vom da și peste câteva dintre domeniile matematicii care de obicei se amână până la facultate sau mai departe, cum ar fi criza din teoria mulțimilor, care aici apare ca un fel de metaforă pentru jurisprudența Curții Supreme de Justiție și arbitrajul din baseball; recente evoluții din teoria numerelor analitice, care demonstrează interacțiunea dintre structură și caracterul aleatoriu; teoria informației și schemele combinatorii, care ne ajută să ne explicăm cum a reușit un grup de studenți de la MIT